Maple // Информационные технологии в образовании и науке. Мат. междун. науч.-прак. конф. ИТОН-2012 8-12 октября. – Казань: Изд-во КФУ, 2012. – С. 159–161.

С. Н. Сидоров

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,

stsid@mail.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f(x), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = f(x), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < 1,\, -\alpha < t < \beta\}$, где $m > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача. Найти в области D функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^2_x(D_+), \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1], \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \;\; (x,t) \in D_- \cup D_+, \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; -\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \;\; u(x,\beta) = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – достаточно гладкие функции, $\varphi(0)=\varphi(1)=$ $=0$, $\psi(0)=\psi(1)=0$, $D_-=D\cap\{t<0\}$, $D_+=D\cap\{t>0\}$.

Отметим, что задача (2) – (6) при $m=0$, $b=0$ изучалась в [1]. В данной работе на основе рассуждений из [2], установлен критерий единственности решения задачи (2) – (6), которое построено при всех $m>0$ и $b>0$ в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Более подробно указанные результаты формулируются в следующих предложениях.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (6), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k\in\mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\Delta(k)=\gamma_{1/(2q)}(k)J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\lambda_k^2}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q)\sqrt{\alpha}-$$

$$-e^{-\lambda_k^2\beta}\left[\frac{1}{\lambda_k^2}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q)\sqrt{\alpha}+w_k(-\alpha)\right]\neq 0, \quad (7)$$

где

$$\gamma_{\pm 1/(2q)}(k)=\pm\frac{1}{2q}\Gamma\left(\pm\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\pm 1/(2q)};$$

$$w_k(-\alpha)=\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)\int\limits_{-\alpha}^{0}J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds-$$

$$-\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sqrt{\alpha}J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q)\int\limits_{-\alpha}^{0}J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds,$$

$J_\nu(z)$ – *функция Бесселя первого рода порядка* ν; $\lambda_k^2=$ $=(qp_k)^2=b^2+(\pi k)^2$; $2q=m+2$; $\Gamma(\cdot)$ – *гамма-функция Эйлера.*

Лемма. *Если выполнено одно из условий:* 1) $\alpha_q=\alpha^q/q$ – *любое натуральное число;* 2) $\alpha_q=p/t$ – *любое дробное число,* *где* p *и* t – *взаимно-простые натуральные числа и* $1/q \neq (4r+ + t - 4td)/t$, *где* $d \in \mathbb{N}$, r – *остаток от деления* kp *на* t, *то существуют положительные постоянные* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и* C_0 *такие, что при любых* $k > k_0$ *и фиксированных* $b > 0$, $\beta > 0$ *справедлива оценка*

$$|k^{1-\lambda}\Delta(k)| \geqslant C_0 > 0, \;\; \lambda = 1/2 - 1/(2q). \tag{8}$$

При выполнении оценки (8) при всех $k > k_0$ и неравенства (7) при $k = 1, 2, ..., k_0$ решение задачи (2) – (6) определяется в виде сумм рядов

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin \pi k x, \;\; f(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \sin \pi k x, \tag{9}$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_k L_k(t) + \psi_k N_k(t)}{\lambda_k^2 \Delta(k)}, & t > 0, \\ \dfrac{\varphi_k P_k(t) + \psi_k Q_k(t)}{\Delta(k)}, & t < 0, \end{cases}$$

$$f_k = \frac{\psi_k}{\Delta(k)}\left[\lambda_k^2 \sqrt{\alpha}\gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\alpha}\gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q)\right] - \frac{\varphi_k}{\Delta(k)} e^{-\lambda_k^2 \beta},$$

$L_k(t)$, $N_k(t)$, $P_k(t)$ и $Q_k(t)$ – функции зависящие от t, α, β, b и m.

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(x) \in C^{3+\alpha}[0,1]$, $1-\lambda < \alpha < < 1$, $\psi(x) \in C^5[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = \varphi''(0) = = \varphi''(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$ *и выполнена оценка* (8) *при* $k > k_0$. *Тогда если* $\Delta(k) \neq 0$ *при всех* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (2) – (6) *и это решение* *определяется рядами* (9)*; если* $\Delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, ..., k_m \leqslant k_0$, *то задача* (2) – (6) *разрешима тогда, когда выполняются условия ортогональности*

$$\int_0^1 \varphi(x) \sin \pi l x \, dx = \int_0^1 \psi(x) \sin \pi l x \, dx = 0, \quad l = k_1, ..., k_m.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 4(546). – С. 55–62.

2. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 1. – С. 1–8.

Л. У. Султанов, Р. Л. Давыдов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

ruslan.davydov@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МКЭ

Настоящая работа посвящена разработке и численной реализации методики исследования напряженно-деформированного состояния упругопластических тел с учетом больших деформаций. Используется процедура пошагового нагружения с итерационным уточнением деформированного состояния. Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов (МКЭ).